8 класс

1. В физкультурном зале находятся тренер и несколько спортсменов. Возраст тренера на 40 лет больше среднего возраста спортсменов и на 35 лет больше среднего возраста всех присутствующих (включая его самого). Сколько спортсменов в зале?

2. Могут ли суммы цифр двух соседних натуральных чисел (то есть чисел n и $n+1$) отличаться *а*) на 2024?; *б*) на 2025?

3. Из девяти карточек с цифрами $1, 2, \ldots, 9$ составляют девятизначное число (каждая цифра используется ровно один раз). Затем вычисляют сумму всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами этого числа. Например, для числа 198237456 сумма равна $19+98+82+23+\ldots+56=434$. Найдите расположение цифр, при котором такая сумма будет *наименьшей*, и укажите её значение.

4. Пятьдесят команд сыграли однокруговой турнир за 49 дней, каждая команда сыграла с каждой, играя по одному матчу в день. За победу в матче давали 3 очка, а за ничью – одно. Оказалось, что у каждой команды количество ничьих либо вдвое больше числа её поражений, либо вдвое меньше числа её побед. Больше всех очков набрал «Зенит». Докажите, что и за два дня до конца соревнования у «Зенита» очков было больше, чем у любой другой команды.

5. В треугольнике ABC угол C равен $60°$. Биссектрисы углов A и B пересекают стороны BC и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AB = AQ + BP$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

9 класс

1. На каждой стороне квадрата записали натуральное число, а в каждой вершине — произведение двух чисел, записанных на сторонах, содержащих эту вершину. Сумма всех чисел, записанных в вершинах квадрата, оказалась равной 77. Чему равна сумма всех чисел, записанных на сторонах квадрата?

2. Из девяти карточек с цифрами $1, 2, \ldots, 9$ составляют девятизначное число (каждая цифра используется ровно один раз). Затем вычисляют сумму всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами этого числа. Например, для числа 198237456 сумма равна $19 + 98 + 82 + 23 + \ldots + 56 = 434$. Найдите расположение цифр, при котором такая сумма будет *наибольшей*, и укажите её значение.

3. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с четвёртого, равно среднему арифметическому трёх предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равно 400?

4. На вечеринке собрались 10 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

5. Окружность с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и P соответственно. Прямая OH перпендикулярна BC и пересекается с PB в точке K. Докажите, что AK делит отрезок BC пополам.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

10 класс

1. Сколько существует 10-значных натуральных чисел, которые делятся на 9 и в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 7?

2. Дан квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Известно, что для любого действительного числа x найдётся такое действительное число y, что $f(x) = f(y) + y$. Найдите наименьшее возможное значение a.

3. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с четвёртого, равно среднему арифметическому трёх предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равно 800?

4. На вечеринке собрались 9 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

5. Окружность ω с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и C соответственно. Внутри угла BAC выбрана точка Q, причём на отрезке AQ нашлась точка P такая, что $AQ \perp OP$. Прямая OP вторично пересекает описанные окружности треугольников QPB и QPC в точках M и N соответственно. Докажите, что $OM = ON$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
Республика Татарстан, 9 декабря 2025 г.

11 класс

1. Сколько существует 11-значных натуральных чисел, которые делятся на 9 и в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

2. Все члены геометрической прогрессии — целые числа. Верно ли, что сумма квадратов *а*) трёх; *б*) четырёх последовательных членов этой прогрессии всегда делится на сумму этих членов?

3. Пусть x, y, z — различные целые числа такие, что $xy+yz+zx = 47$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

4. На вечеринке собрались 9 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

5. Окружность ω с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и C соответственно. Внутри угла BAC выбрана точка Q, причём на отрезке AQ нашлась точка P такая, что $AQ \perp OP$. Прямая OP вторично пересекает описанные окружности треугольников QPB и QPC в точках M и N соответственно. Докажите, что $OM = ON$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

8 класс

1. В физкультурном зале находятся тренер и несколько спортсменов. Возраст тренера на 40 лет больше среднего возраста спортсменов и на 35 лет больше среднего возраста всех присутствующих (включая его самого). Сколько спортсменов в зале?

Ответ: 7 *спортсменов.*

Решение. Пусть n — число спортсменов, s — их средний возраст. Тогда $s+40$ — возраст тренера, и $ns+(s+40)$ — сумма возрастов присутствующих в зале. Отсюда средний возраст всех присутствующих в зале равен, с одной стороны,

$$\frac{ns+s+40}{n+1} = s + \frac{40}{n+1}\,,$$

а с другой стороны, равен $s+40-35 = s+5$. Из уравнения $s+\dfrac{40}{n+1} = s+5$ находим $n = 7$. Следовательно, в зале находятся 7 спортсменов.

Критерии. Только ответ — 2 балла. Правильно составлено уравнение — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

2. Могут ли суммы цифр двух соседних натуральных чисел (то есть чисел n и $n+1$) отличаться *а*) на 2024?; *б*) на 2025?

Ответ: *а*) *могут;* *б*) *не могут.*

а) Рассмотрим число $n = 10^{225}-1$, десятичная запись которого состоит из 225 девяток. Сумма его цифр равна $225\cdot 9 = 2025$, причём у числа $n+1 = 10^{225}$ сумма всех цифр равна 1. Значит, суммы цифр этих чисел отличаются на 2024.

б) **Первое решение.** Пусть $S(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n. Рассмотрим две разности $A = S(n+1)-S(n)$ и $B = S(n)-S(n+1)$. По признаку делимости сумма цифр даёт тот же остаток при делении на 9, что и само число, то есть $S(n) \equiv n \pmod 9$. Значит,

$$A \equiv (n+1)-n = 1 \pmod 9, \qquad B \equiv n-(n+1) = -1 \equiv 8 \pmod 9.$$

Другими словами, суммы цифр соседних чисел отличаются только на числа, которые при делении на 9 дают остаток 1 или 8. Но число 2025 делится на 9 без остатка.

Второе решение. При переходе от n к $n+1$ возможны два случая.

1. Последняя цифра n не равна 9. Тогда $S(n+1) = S(n)+1$, так как последняя цифра (и только она) увеличивается на 1. Значит, $S(n+1)-S(n) = 1 \neq 2025$.

2. Число n оканчивается на k девяток ($k \geqslant 1$), то есть имеет вид $n = A999\ldots9$, где A — число без завершающих девяток. Тогда $n+1 = (A+1)\cdot 10^k$ и суммы цифр чисел n и $n+1$ равны $S(n) = S(A)+9k$ и $S(n+1) = S(A+1)$. Значит,

$$S(n+1)-S(n) = S(A+1)-S(A)-9k.$$

Так как A не оканчивается на 9, то $S(A+1)-S(A) = 1$, поэтому $S(n+1)-S(n) = 1-9k$. Отсюда следует, что $|S(n+1)-S(n)| = 9k-1 \neq 2025$ при целом k.

Критерии. Только ответы — 0 баллов. Правильный пример в пункте *а*) — 3 балла, решение пункта *б*) — 4 балла. В пункте *б*) пропущен один из случаев $S(n+1)-S(n) \equiv \pm 1 \pmod 9$ — не более 2 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Из девяти карточек с цифрами $1, 2, \ldots, 9$ составляют девятизначное число (каждая цифра используется ровно один раз). Затем вычисляют сумму всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами этого числа. Например, для числа 198237456 сумма равна $19 + 98 + 82 + 23 + \ldots + 56 = 434$. Найдите расположение цифр, при котором такая сумма будет *наименьшей*, и укажите её значение.

Ответ: *наименьшая сумма* 397.

Решение. Рассмотрим девятизначное число $\overline{d_1 d_2 \ldots d_9}$, составленное из всех цифр от 1 до 9 без повторений. Сумма всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами, равна

$$S = \overline{d_1 d_2} + \overline{d_2 d_3} + \ldots + \overline{d_8 d_9}.$$

Заметим, что в этой сумме каждая цифра, кроме первой и последней, участвует дважды: один раз в разряде десятков, другой — в разряде единиц. Поэтому

$$S = 10d_1 + 11(d_2 + d_3 + \ldots + d_8) + d_9.$$

Сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45, поэтому $d_1 + d_2 + \ldots + d_9 = 45$, и значит, $d_2 + d_3 + \ldots + d_8 = 45 - d_1 - d_9$. Подставив в выражение для S, получим $S = 10d_1 + 11(45 - d_1 - d_9) + d_9 = 495 - d_1 - 10d_9$.

Таким образом, сумма S зависит только от первой и последней цифр числа. Сумма S будет наименьшей, когда число $10d_9 + d_1 = \overline{d_9 d_1}$ наибольшее. Поскольку цифры различны, наибольшее значение $\overline{d_9 d_1}$ равно 98, то есть цифры d_9 и d_1 равны соответственно 9 и 8, при этом $S = 495 - 8 - 10 \cdot 9 = 397$. Итак, минимальная сумма $S = 397$ достигается для любого девятизначного числа, которое начинается с цифры 8 и заканчивается цифрой 9. Остальные цифры могут располагаться в *произвольном* порядке.

Пример такого числа: 812345679.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Выражение для S записано в виде $10d_1 + 11(d_2 + \ldots + d_8) + d_9$ без дальнейшего продвижения — 1 балл. Получено выражение $S = 495 - d_1 - 10d_9$ без дальнейшего продвижения — 2 балла. Указано, что сумма S будет наименьшей, когда меньшие цифры входят в неё с бóльшими коэффициентами, но отыскания максимума проведено с ошибками — 3 балла. При нахождении максимума $d_1 + 10d_9$ указаны недопустимые цифры (например, $d_1 = 9$ и $d_9 = 9$) — 4 балла. Правильно найдены $d_1 = 8$ и $d_9 = 9$, но не указано, что любое число с такими крайними цифрами даёт минимум, или есть мелкие недочёты в объяснении — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. Пятьдесят команд сыграли однокруговой турнир за 49 дней, каждая команда сыграла с каждой, играя по одному матчу в день. За победу в матче давали 3 очка, а за ничью – одно. Оказалось, что у каждой команды количество ничьих либо вдвое больше числа её поражений, либо вдвое меньше числа её побед. Больше всех очков набрал «Зенит». Докажите, что и за два дня до конца соревнования у «Зенита» очков было больше, чем у любой другой команды.

Решение. Пусть некоторая команда n матчей проиграла и $2n$ матчей сыграла вничью. Тогда у неё всего $49 - 3n$ выигрышей, поэтому она набрала $3(49 - 3n) + 2n = 147 - 7n$ очков. Если же у команды n ничейных и $2n$ выигрышных матчей, то она набрала $n + 3 \cdot 2n = 7n$ очков.

Таким образом, у каждой команды количество набранных очков равно либо $147 - 7n = 7(21 - n)$, либо $7n$, то есть кратно 7. Следовательно, в конце турнира у «Зенита» хотя бы на 7 очков больше, чем у любой другой команды. За один турнирный день разница между количеством набранных очков у двух команд может измениться максимум на три очка, а за 2 дня – максимум на 6 очков. Отсюда следует требуемое утверждение.

Критерии. Доказано, что количество очков у каждой команды либо $147 - 7n$, либо $7n$ — 1 балл. Доказано, что у каждой команды количество очков кратно 7 — 3 балла. Доказано, что у «Зенита» хотя бы на 7 очков больше — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC угол C равен 60°. Биссектрисы углов A и B пересекают стороны BC и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AB = AQ + BP$.

Решение. (Рис. 1.) На стороне AB выберем точку R такую, что $AR = AQ$. Пусть E — точка пересечения биссектрис AP и BQ, а D — точка пересечения отрезков QR и AE.

Сумма углов A и B равна $180^\circ - \angle C = 120^\circ$. Значит, $\angle EAB + \angle EBA = 60^\circ$, поэтому $\angle AEB = 120^\circ$. Тогда $\angle PEB = 180^\circ - \angle AEB = 60^\circ$ и $\angle QEA = 180^\circ - \angle AEB = 60^\circ$.

Так как треугольник ARQ равнобедренный (по построению $AR = AQ$) и AE — биссектриса угла A, то AD также является медианой и высотой. Следовательно, $DQ = DR$ и $AD \perp QR$.

Рассмотрим треугольники AQE и ARE: $AQ = AR$, AE — общая сторона, $\angle QAE = \angle RAE$. Поэтому треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $QE = RE$, и значит, высота DE является биссектрисой в равнобедренном треугольнике QER и $\angle AEQ = \angle AER = 60^\circ$. Тогда $\angle QER = \angle QEA + \angle AER = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

Поскольку точки B, E, Q лежат на одной прямой, $\angle REB = 180^\circ - \angle QER = 60^\circ$. Таким образом, $\angle REB = \angle PEB = 60^\circ$.

В треугольниках EBP и EBR: BE — общая сторона, $\angle EBP = \angle EBR$ (так как BE — биссектриса), $\angle PEB = \angle REB = 60^\circ$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам, откуда $BP = BR$. Значит, $AB = AR + RB = AQ + BP$, что и требовалось.

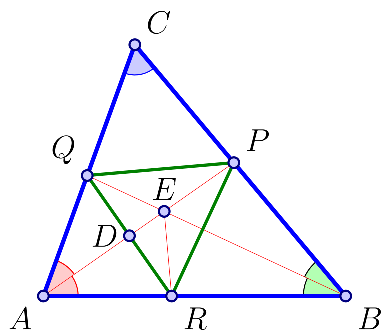

Рис. 1

Критерии. Доказано, что $\angle AEB = 120^\circ$ — 1 балл. На стороне AB выбрана точка R, $AR = AQ$, и доказано, что $AE \perp QR$ — 2 балла. Доказано, что $\angle PEB = \angle QEA = 60^\circ$ — 3 балла. Доказано, что $QE = RE$ — 4 балла. Вычисление $\angle REB = 60^\circ$ — 5 баллов. Установлено равенство треугольников EBP и EBR и $BP = BR$ — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

9 класс

1. На каждой стороне квадрата записали натуральное число, а в каждой вершине — произведение двух чисел, записанных на сторонах, содержащих эту вершину. Сумма всех чисел, записанных в вершинах квадрата, оказалась равной 77. Чему равна сумма всех чисел, записанных на сторонах квадрата?

Ответ: 18.

Решение. Пусть числа на противоположных сторонах квадрата равны a и c, а на других двух противоположных сторонах — b и d. Тогда числа в вершинах квадрата (произведения чисел на смежных сторонах) равны ab, bc, cd и da. Их сумма:

$$ab + bc + cd + da = a(b + d) + c(b + d) = (a + c)(b + d) = 77.$$

Все рассматриваемые числа — натуральные, поэтому значение каждой из скобок не меньше двух. Число 77 можно разложить на два множителя, каждый из которых не меньше двух, единственным образом: $77 = 7 \times 11$. Значит, $a + c$ и $b + d$ равны 7 и 11 (в каком-то порядке), поэтому сумма всех чисел на сторонах квадрата равна $a + b + c + d = (a + c) + (b + d) = 7 + 11 = 18$.

Критерии. Правильный ответ найден подбором — 1 балл. Преобразование суммы чисел в вершинах к виду $(a + c)(b + d) = 77$ — ещё 2 балла. Доказано, что $a + c$ и $b + d$ — делители числа 77 — ещё 2 балла. Установлено, что $a + c$ и $b + d$ равны 7 или 11 — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

2. Из девяти карточек с цифрами $1, 2, \ldots, 9$ составляют девятизначное число (каждая цифра используется ровно один раз). Затем вычисляют сумму всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами этого числа. Например, для числа 198237456 сумма равна $19 + 98 + 82 + 23 + \ldots + 56 = 434$. Найдите расположение цифр, при котором такая сумма будет *наибольшей*, и укажите её значение.

Ответ: *наибольшая сумма* 483.

Решение. Рассмотрим девятизначное число $\overline{d_1 d_2 \ldots d_9}$, составленное из всех цифр от 1 до 9 без повторений. Сумма всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами, равна

$$S = \overline{d_1 d_2} + \overline{d_2 d_3} + \ldots + \overline{d_8 d_9}.$$

Заметим, что в этой сумме каждая цифра, кроме первой и последней, участвует дважды: один раз в разряде десятков, другой — в разряде единиц. Поэтому

$$S = 10d_1 + 11(d_2 + d_3 + \ldots + d_8) + d_9.$$

Сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45, поэтому $d_1 + d_2 + \ldots + d_9 = 45$, и значит, $d_2 + d_3 + \ldots + d_8 = 45 - d_1 - d_9$. Подставив в выражение для S, получим $S = 10d_1 + 11(45 - d_1 - d_9) + d_9 = 495 - d_1 - 10d_9$.

Таким образом, сумма S зависит только от первой и последней цифр числа. Сумма S будет наибольшей, когда число $10d_9 + d_1 = \overline{d_9 d_1}$ наименьшее. Поскольку цифры различны, наименьшее значение $\overline{d_9 d_1}$ равно 12, то есть цифры d_9 и d_1 равны соответственно 1 и 2, при этом $S = 495 - 2 - 10 \cdot 1 = 483$. Итак, максимальная сумма $S = 483$ достигается для любого девятизначного числа, которое начинается с цифры 2 и заканчивается цифрой 1. Остальные цифры могут располагаться в *произвольном* порядке.

Пример такого числа: 234567891.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Выражение для S записано в виде $10d_1 + 11(d_2 + \ldots + d_8) + d_9$ без дальнейшего продвижения — 1 балл. Получено выражение $S = 495 - d_1 - 10d_9$, но минимизация не проведена или проведена с ошибками — 2 балла. Указано, что сумма S будет наибольшей, когда бо́льшие цифры входят в неё с бо́льшими коэффициентами, но минимизация не проведена или проведена с ошибками — 3 балла. Проведена минимизация $d_1 + 10d_9$, но выбраны недопустимые цифры (например, $d_1 = 1$ и $d_9 = 1$) — 4 балла. Правильно найдены $d_1 = 2$ и $d_9 = 1$, но не указано, что любое число с такими крайними цифрами даёт максимум, или есть мелкие недочёты в объяснении — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с четвёртого, равно среднему арифметическому трёх предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равно 400?

Ответ: 2 014.

Решение. Обозначим первые три числа через x, y и z. Тогда следующие числа равны:

$$a_4 = \frac{x+y+z}{3}, \quad a_5 = \frac{x+4y+4z}{9}, \quad a_6 = \frac{4x+7y+16z}{27}, \quad a_7 = \frac{16x+28y+37z}{81}.$$

По условию $a_7 = 400$, поэтому $16x + 28y + 37z = 32\,400$. Заметим, что $16x$ и $28y$ делятся на 4, и $32\,400$ также делится на 4. Значит, $37z$ делится на 4. Так как 37 и 4 взаимно просты, то z делится на 4. В частности, $z \geqslant 4$. Поскольку $y \geqslant 1$, $z \geqslant 4$ и $16x = 32\,400 - 28y - 37z$, получаем

$$16x \leqslant 32\,400 - 28 \cdot 1 - 37 \cdot 4 = 32\,224, \quad \text{откуда} \quad x \leqslant 2\,014.$$

Покажем, что значение $x = 2014$ достигается. Пусть $x = 2\,014$, $y = 1$ и $z = 4$, тогда следующие четыре числа равны $a_4 = 673$, $a_5 = 226$, $a_6 = 301$ и $a_7 = 400$. Все числа натуральные. Следовательно, максимальное значение первого числа равно 2014.

Критерии. Получено уравнение $16x + 28y + 37z = 32\,400$ — 1 балл. Доказано, что z делится на 4 — 2 балла. Получена оценка $x \leqslant 2\,014$ — 2 балла. Приведён пример с $x = 2\,014$ и проверено, что все числа натуральные — 2 балла. Баллы суммируются. Полное решение — 7 баллов.

4. На вечеринке собрались 10 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

Ответ: 20 *троек.*

Решение. Рассмотрим граф из 10 вершин, соответствующих гостям вечеринки. Две вершины графа соединим красным отрезком, если соответствующие им люди знакомы друг с другом, и синим отрезком, если не знакомы. Докажем, что общее число красных и синих треугольников не менее 20.

Обозначим через E, F и G — количество красных, синих и *неполных* треугольников, содержащих рёбра обоих цветов (такие тройки не являются ни дружескими, ни незнакомыми). Тогда общее число треугольников в графе равно

$$E + F + G = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120. \tag{1}$$

Пронумеруем всех гостей от 1 до 10, и пусть d_i — количество знакомых i-го человека, тогда количество незнакомых с ним будет $9 - d_i$. Для каждого гостя i выберем одного знакомого с ним человека j – это можно сделать d_i способами, а также одного незнакомого с ним человека k – это можно сделать $(9 - d_i)$ способами. Полученная тройка ijk образует *неполный* треугольник. Таким образом, для каждого гостя получается $d_i(9 - d_i)$ неполных треугольников. Заметим, что каждый неполный треугольник при таком способе подсчёта учитывается дважды — для каждой из двух вершин треугольника ijk, из которых исходят разноцветные рёбра. (Если отрезок jk синий, то треугольник ijk учитывается также при подсчёте неполных треугольников, связанных с j-м человеком. Если же отрезок jk красный, то треугольник ijk учитывается при подсчёте неполных треугольников, связанных с k-м человеком.) Следовательно,

$$G = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} d_i(9-d_i).$$

Оценим выражение $x(9-x) = \frac{81}{4} - \left(x-\frac{9}{2}\right)^2 \leqslant \frac{81}{4}$. Поскольку x – целое, каждое слагаемое суммы не больше 20, и значит, $G \leqslant \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 20$, то есть $G \leqslant 100$. Отсюда и из равенства (1) следует, что $E+F = 120 - G \geqslant 20$ (оценка).

Приведём пример, подтверждающий точность этой оценки.

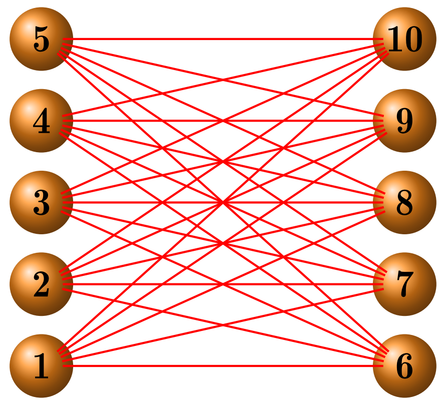

Рис. 2

На рисунке 2 изображён граф знакомств, в котором гости разбиты на две группы: $\{1,2,3,4,5\}$ и $\{6,7,8,9,10\}$ (полный двудольный граф $K_{5,5}$). Все рёбра между вершинами из разных групп — красные (знакомства), а внутри групп — синие (незнакомства). Тогда красных треугольников нет, $E=0$, а синие треугольники образуются внутри каждой группы, $F = C_5^3 + C_5^3 = 20$, и значит, $E+F=20$.

Замечание. Эта задача является продолжением (и обобщением) известной задачи, в которой требуется доказать, что в компании из 6 человек всегда найдутся трое, попарно знакомых между собой, или трое, попарно не знакомых.

Критерии. Записано соотношение $E+F+G = C_{10}^3 = 120$ — 1 балл. Доказано, что число неполных треугольников графа знакомств равно $\frac{1}{2}\sum d_i(9-d_i)$ — 3 балла. Доказано, что число неполных треугольников $d_i(9-d_i) \leqslant 20$ для каждой вершины — 4 балла. Доказано, что число дружеских и незнакомых троек не меньше 20 — 5 баллов (оценка). Правильно указана конструкция примера — ещё 2 балла. Сказано, что оценка достигается на полном двудольном графе, но не подсчитано число троек — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

5. Окружность с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и P соответственно. Прямая OH перпендикулярна BC и пересекается с PB в точке K. Докажите, что AK делит отрезок BC пополам.

Решение. (Рис. 3.) Через точку K проведём прямую LM, параллельную BC так, что точка L лежит на AC, а M — на AB. Получающиеся четырёхугольники $OLPK$ и $OKMB$ — вписанные. Действительно, у первого из них есть прямые углы OKL и OPL, а у второго — прямые углы OKM и OBM.

Из того, что четырёхугольник $OLPK$ — вписанный, получаем равенство углов OLK и OPK. Аналогично, рассматривая четырёхугольник $OKMB$, получаем равенство $\angle OMK = \angle OBK$. Кроме того, треугольник OBP — равнобедренный ($OB = OP$), откуда $\angle OPK = \angle OBK$.

Запишем цепочку равенств

$$\angle OLK = \angle OPK = \angle OBK = \angle OMK,$$

из которой следует, что треугольник OLM — равнобедренный. Следовательно, перпендикуляр OK делит сторону LM пополам и для треугольника ALM прямая AK является медианой. Из подобия треугольников ALM и ACB ($LM \parallel CB$) получаем, что прямая AK является медианой и для треугольника ACB и делит CB пополам.

Критерии. Построена прямая LM через точку K параллельно BC — 1 балл. Доказано, что четырёхугольник $OLPK$ (или $OKMB$) — вписанный — 2 балла. Доказано равенство углов OLK, OPK, OBK и OMK — 3 балла. Доказано равенство $\angle OLK = \angle OMK$ и сделан вывод, что треугольник OLM — равнобедренный, — 4 баллов. Установлено, что K — середина LM (или OK — медиана к LM) — 5 баллов. Указано, что в треугольнике ALM прямая AK — медиана — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

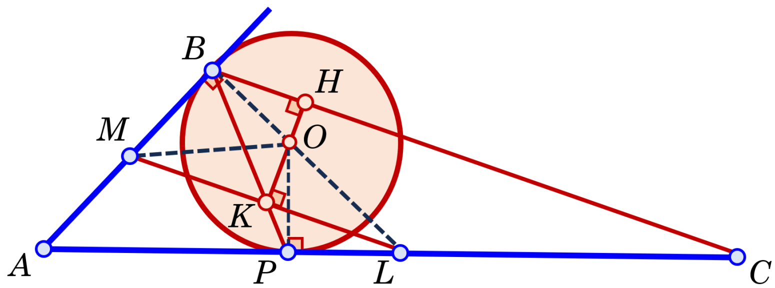

Рис. 3

10 класс

1. Сколько существует 10-значных натуральных чисел, которые делятся на 9 и в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 7?

Ответ: 9.

Решение. Пусть число содержит k цифр 7. Тогда сумма его цифр равна $7k$. По признаку делимости на 9 необходимо, чтобы $7k$ делилось на 9. Поскольку числа 7 и 9 взаимно просты, k должно делиться на 9. Учитывая, что число 10-значное и первая цифра равна 7, количество семёрок k удовлетворяет неравенству $1 \leqslant k \leqslant 10$. Единственное значение k, кратное 9 в этом диапазоне, это $k = 9$.

Поэтому в записи числа участвуют 9 семёрок и один ноль. И наоборот, каждое число из 9 семёрок и одного нуля удовлетворяет условию. Ноль может стоять в любой позиции, кроме первой, что даёт 9 вариантов.

Критерии. Ответ без объяснений — 0 баллов. Введена переменная k (количество цифр 7) и доказано, что $7k$ кратно 9 — 2 балла. Доказано, что количество k семёрок делится на 9 — 3 балла. Найдено значение $k = 9$ — 5 баллов. Ошибка при подсчёте — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

2. Дан квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Известно, что для любого действительного числа x найдётся такое действительное число y, что $f(x) = f(y) + y$. Найдите наименьшее возможное значение a.

Ответ: $a = -\frac{1}{2}$.

Решение. Запишем равенство $f(x) = f(y) + y$ в виде $y^2 + (a+1)y - x^2 - ax = 0$. Из условия следует, что это уравнение разрешимо относительно y при любом значении x, и значит, дискриминант $D = (a+2x)^2 + 2a + 1$ этого квадратного трёхчлена неотрицательный. В частности, при $x = -\frac{a}{2}$ имеем неравенство $2a + 1 \geqslant 0$, то есть $a \geqslant -\frac{1}{2}$ (оценка).

Пример. При $a = -\frac{1}{2}$ уравнение $f(x) = f(y) + y$ при любом x имеет решение $y = -x$, так как

$$f(y) + y - f(x) = y^2 + \frac{1}{2}y - x^2 + \frac{1}{2}x = (y+x)\left(y - x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Критерии. Условие правильно преобразовано к квадратному уравнению относительно y — 1 балл. Сделан вывод о необходимости неотрицательности дискриминанта D_y, но его выражение найдено неверно — не более 2 баллов. Дискриминант D_y найден, но дальнейший анализ проведён с ошибками (например, рассматривается дискриминант относительно x без учёта того, что x — произвольный параметр) — 3 балла. Доказано неравенство $a \geqslant -\frac{1}{2}$, но пропущено объяснение достижимости (нет примера) — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с четвёртого, равно среднему арифметическому трёх предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равно 800?

Ответ: 4 039.

Решение. Обозначим первые три числа через x, y и z. Тогда следующие числа равны:

$$a_4 = \frac{x+y+z}{3}, \quad a_5 = \frac{x+4y+4z}{9}, \quad a_6 = \frac{4x+7y+16z}{27}, \quad a_7 = \frac{16x+28y+37z}{81}.$$

По условию $a_7 = 800$, поэтому $16x + 28y + 37z = 81 \cdot 800 = 64\,800$. Заметим, что $16x$ и $28y$ делятся на 4, и $64\,800$ также делится на 4. Значит, $37z$ делится на 4. Так как 37 и 4 взаимно просты, то z

делится на 4. В частности, $z \geqslant 4$. Поскольку $y \geqslant 1$, $z \geqslant 4$ и $16x = 64\,800 - 28y - 37z$, получаем

$$16x \leqslant 64\,800 - 28 \cdot 1 - 37 \cdot 4 = 64\,800 - 28 - 148 = 64\,624, \quad \text{откуда} \quad x \leqslant \frac{64\,624}{16} = 4\,039.$$

Покажем, что значение $x = 4\,039$ достигается. Пусть $x = 4\,039$, $y = 1$ и $z = 4$, тогда следующие четыре числа равны: $a_4 = 1\,348$, $a_5 = 451$, $a_6 = 601$, $a_7 = 800$. Все числа натуральные. Следовательно, максимальное значение первого числа равно $4\,039$.

Критерии. Получено уравнение $16x + 28y + 37z = 64\,800$ — 1 балл. Доказано, что z делится на 4 — 2 балла. Получена оценка $x \leqslant 4\,039$ — 2 балла. Приведён пример с $x = 4\,039$ и проверено, что все числа натуральные — 2 балла. Баллы суммируются. Полное решение — 7 баллов.

4. На вечеринке собрались 9 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

Ответ: 12 *троек.*

Решение. Рассмотрим граф из 9 вершин, соответствующих гостям вечеринки. Две вершины графа соединим красным отрезком, если соответствующие им люди знакомы друг с другом, и синим отрезком, если не знакомы. Докажем, что общее число красных и синих треугольников не менее 12.

Обозначим через E, F и G — количество красных, синих и *неполных* треугольников, содержащих рёбра обоих цветов (такие тройки не являются ни дружескими, ни незнакомыми). Тогда общее число треугольников в графе равно

$$E + F + G = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84. \qquad (2)$$

Пронумеруем всех гостей от 1 до 9, и пусть d_i — количество знакомых i-го человека, тогда количество незнакомых с ним будет $8 - d_i$. Для каждого гостя i выберем одного знакомого с ним человека j – это можно сделать d_i способами, а также одного незнакомого с ним человека k – это можно сделать $(8 - d_i)$ способами. Полученная тройка ijk образует *неполный* треугольник. Таким образом, для каждого гостя получается $d_i(8 - d_i)$ неполных треугольников. Заметим, что каждый неполный треугольник при таком способе подсчёта учитывается дважды — для каждой из двух вершин треугольника ijk, из которых исходят разноцветные рёбра. (Если отрезок jk синий, то треугольник ijk учитывается также при подсчёте неполных треугольников, связанных с j-м человеком. Если же отрезок jk красный, то треугольник ijk учитывается при подсчёте неполных треугольников, связанных с k-м человеком.) Следовательно,

$$G = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9} d_i(8 - d_i).$$

Поскольку $x(8 - x) = 16 - (x - 4)^2$, каждое слагаемое в этой сумме не больше 16, и значит, $G \leqslant \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 16$, то есть $G \leqslant 72$. Отсюда и из равенства (2) следует, что $E + F = 84 - G \geqslant 12$.

Приведём Пример, подтверждающий точность этой оценки.

На рисунке 4 изображён граф в виде 9-угольника, у которого из каждой вершины выходит по 4 красных (они указаны на рисунке) и по 4 синих (их на рисунке нет) ребра. Такой граф называется 4-*регулярным*. У него ровно 3 красных треугольника 147, 258, 369 и 9 синих – 135, 357, 579, 792, 924, 246, 468, 681, 813.

На рисунке 5 этот же граф реализован по-другому. Из каждой вершины графа выходят 4 синих рёбра – в каждые две вершины, соседние справа и слева от неё. В этом графе также 3 красных треугольника 147, 258, 369 и 9 синих – 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789, 891, 912.

Замечание. Эта задача является продолжением (и обобщением) известной задачи, в которой требуется доказать, что в компании из 6 человек всегда найдутся трое, попарно знакомых между собой, или трое, попарно не знакомых.

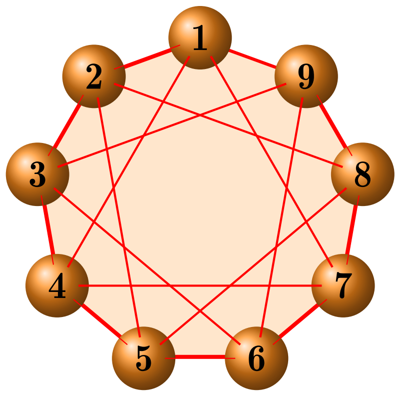

Рис. 4

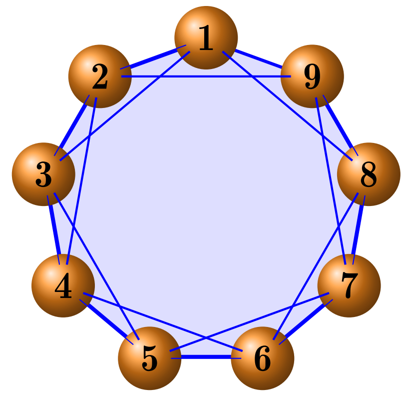

Рис. 5

Критерии. Записано соотношение $E + F + G = C_9^3 = 84$ — 1 балл. Доказано, что число неполных треугольников графа знакомств равно $\frac{1}{2}\sum d_i(8 - d_i)$ — 2 балла. Доказано, что число неполных треугольников $d_i(8-d_i) \leqslant 16$ для каждой вершины — 3 балла. Доказано, что число дружеских и незнакомых троек не меньше 12 — 4 балла (оценка). Приведён пример 4-регулярного графа без подсчёта числа троек — 5 баллов. Приведён пример с подсчётом, но не все тройки явно указаны — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

5. Окружность ω с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и C соответственно. Внутри угла BAC выбрана точка Q, причём на отрезке AQ нашлась точка P такая, что $AQ \perp OP$. Прямая OP вторично пересекает описанные окружности треугольников QPB и QPC в точках M и N соответственно. Докажите, что $OM = ON$.

Решение. Пусть описанные окружности треугольников QPB и QPC пересекают лучи AB и AC в точках D и E соответственно (рис. 6). Из теоремы о произведении отрезков секущих получаем:

$$AB \cdot AD = AP \cdot AQ \quad \text{и} \quad AC \cdot AE = AP \cdot AQ.$$

Отсюда $AB \cdot AD = AC \cdot AE$. Отрезки AB и AC равны как отрезки касательных к ω, поэтому $AD = AE$ и, значит, треугольник ADE равнобедренный.

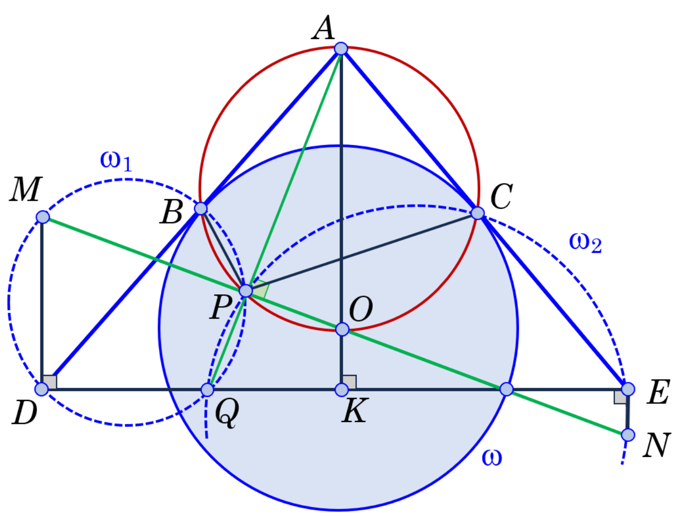

Рис. 6

Пусть K — середина DE. Тогда прямая AK является медианой, высотой и биссектрисой равнобедренного треугольника ADE, в частности, AK проходит через O. Поскольку B и C — точки касания окружности с центром O, имеем $\angle ABO = \angle ACO = \angle APO = 90^\circ$, то есть точки A, B, C, P, O лежат на окружности с диаметром AO.

Из вписанных четырёхугольников $ABPC$, $BPQD$, $CPQE$ имеем:

$$\angle PQD = 180^\circ - \angle PBD = \angle ABP = 180^\circ - \angle ACP = \angle PCE = 180^\circ - \angle PQE,$$

поэтому точка Q лежит на отрезке DE.

Так как четырёхугольник $PQDM$ вписанный, то $\angle MDQ = \angle MPQ = 90^\circ$, откуда $MD \perp DE$. Аналогично, $NE \perp DE$. Таким образом, $MD \parallel OK \parallel NE$ и $DK = KE$. Отсюда $OM = ON$.

Критерии. Доказано, что $AD = AE$ — 2 балла. Установлено, что прямая AO содержит биссектрису, медиану и высоту треугольника ADE — 3 балла. Дополнительно доказано, что точки A, B, C, P, O лежат на одной окружности (с использованием прямых углов) — 4 балла. Доказано, что точка Q лежит на отрезке DE — 5 баллов. Доказано, что $MD \parallel OK \parallel NE$ и $DK = KE$ — 6 баллов.

11 класс

1. Сколько существует 11-значных натуральных чисел, которые делятся на 9 и в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

Ответ: 45.

Решение. Пусть число содержит k цифр 8. Тогда сумма его цифр равна $8k$. По признаку делимости на 9 необходимо, чтобы $8k$ делилось на 9. Поскольку числа 8 и 9 взаимно просты, k должно делиться на 9. Учитывая, что число 11-значное и первая цифра равна 8, количество восьмёрок k удовлетворяет неравенству $1 \leqslant k \leqslant 11$. Единственное значение k, кратное 9 в этом диапазоне, это $k = 9$.

Поэтому в записи числа участвуют 9 восьмёрок и два нуля. И наоборот, каждое число из 9 восьмёрок и двух нулей удовлетворяет условию. Первая цифра – это 8, поэтому нули можно разместить на любых двух из оставшихся 10 позиций. Количество способов выбрать 2 позиции из 10 равно $C_{10}^2 = 45$.

Критерии. Ответ без объяснений — 0 баллов. Введена переменная k (количество восьмёрок) и доказано, что $8k$ кратно 9 — 2 балла. Доказано, что количество k восьмёрок делится на 9 — 3 балла. Найдено значение $k = 9$ — 5 баллов. Ошибка при подсчёте — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

2. Все члены геометрической прогрессии — целые числа. Верно ли, что сумма квадратов *а*) трёх; *б*) четырёх последовательных членов этой прогрессии всегда делится на сумму этих членов?

Ответ: *а*) *да*; *б*) *нет*.

Решение. *а*) Рассмотрим три последовательных члена геометрической прогрессии: a, aq, aq^2, где a и q таковы, что все члены — целые числа. Обозначим $S = a + aq + aq^2 = a(1 + q + q^2)$ и $Q = a^2 + (aq)^2 + (aq^2)^2 = a^2(1 + q^2 + q^4)$. Тогда

$$\frac{Q}{S} = \frac{a^2(1 + q^2 + q^4)}{a(1 + q + q^2)} = a \cdot \frac{1 + q^2 + q^4}{1 + q + q^2}.$$

Заметим, что $1 + q^2 + q^4 = (1 + q^2)^2 - q^2$, поэтому $1 + q^2 + q^4 = (1 + q + q^2)(1 - q + q^2)$. Значит, $\frac{Q}{S} = a(1 - q + q^2)$. Поскольку a, aq, aq^2 — целые числа, то $a(1 - q + q^2) = a - aq + aq^2$ также целое. Таким образом, Q делится на S.

б) Рассмотрим геометрическую прогрессию $1, 2, 4, 8, \ldots$. Для неё сумма квадратов четырёх последовательных членов $1^2+2^2+4^2+8^2 = 85$ не делится на их сумму $1+2+4+8 = 15$. Значит, утверждение для четырёх членов неверно.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Разложение $1+q^2+q^4$ на множители — 2 балла. Обоснование делимости в пункте *а*) — 5 баллов. Правильный контрпример в пункте *б*) — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. Пусть x, y, z — различные целые числа такие, что $xy+yz+zx = 47$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: 50.

Решение. Поскольку числа x, y и z — различные, можно считать, что $x < y < z$. Тогда $y - x \geqslant 1$, $z - y \geqslant 1$ и $z - x \geqslant 2$, поэтому

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geqslant 1^2 + 1^2 + 2^2.$$

Раскрыв скобки и сокращая на 2, получим

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geqslant 3,$$

и так как $xy + yz + zx = 47$, имеем $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 50$.

Знак равенства достигается, например, для чисел $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Найдено неравенство $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geqslant 50$ (например, из соображений о минимальности квадратов разностей) — 5 баллов. Приведён пример чисел x, y и z, для которых достигается минимум — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. На вечеринке собрались 9 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

Ответ: 12 *троек.*

Решение. Рассмотрим граф из 9 вершин, соответствующих гостям вечеринки. Две вершины графа соединим красным отрезком, если соответствующие им люди знакомы друг с другом, и синим отрезком, если не знакомы. Докажем, что общее число красных и синих треугольников не менее 12.

Обозначим через E, F и G — количество красных, синих и *неполных* треугольников, содержащих рёбра обоих цветов (такие тройки не являются ни дружескими, ни незнакомыми). Тогда общее число треугольников в графе равно

$$E + F + G = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84. \qquad (3)$$

Пронумеруем всех гостей от 1 до 9, и пусть d_i — количество знакомых i-го человека, тогда количество незнакомых с ним будет $8-d_i$. Для каждого гостя i выберем одного знакомого с ним человека j – это можно сделать d_i способами, а также одного незнакомого с ним человека k – это можно сделать $(8 - d_i)$ способами. Полученная тройка ijk образует *неполный* треугольник. Таким образом, для каждого гостя получается $d_i(8-d_i)$ неполных треугольников. Заметим, что каждый неполный треугольник при таком способе подсчёта учитывается дважды — для каждой из двух вершин треугольника ijk, из которых исходят разноцветные рёбра. (Если отрезок jk синий, то треугольник ijk учитывается также при подсчёте неполных треугольников, связанных с j-м человеком. Если же отрезок jk красный, то треугольник ijk учитывается при подсчёте неполных треугольников, связанных с k-м человеком.) Следовательно,

$$G = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9} d_i(8 - d_i).$$

Поскольку $x(8-x) = 16-(x-4)^2$, каждое слагаемое в этой сумме не больше 16, и значит, $G \leqslant \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 16$, то есть $G \leqslant 72$. Отсюда и из равенства (3) следует, что $E + F = 84 - G \geqslant 12$.

Приведём Пример, подтверждающий точность этой оценки.

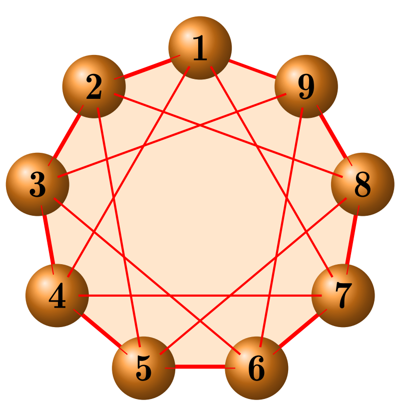

Рис. 7

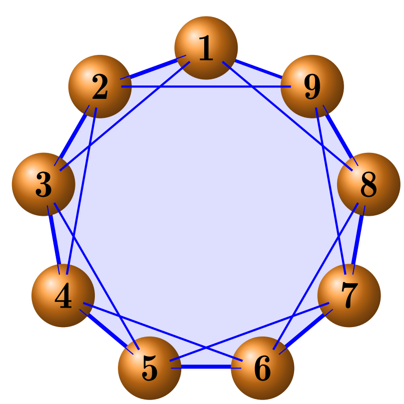

Рис. 8

На рисунке 7 изображён граф в виде 9-угольника, у которого из каждой вершины выходит по 4 красных (они указаны на рисунке) и по 4 синих (их на рисунке нет) ребра. Такой граф называется

4-*регулярным*. У него ровно 3 красных треугольника 147, 258, 369 и 9 синих – 135, 357, 579, 792, 924, 246, 468, 681, 813.

На рисунке 8 этот же граф реализован по-другому. Из каждой вершины графа выходят 4 синих рёбра – в каждые две вершины, соседние справа и слева от неё. В этом графе также 3 красных треугольника 147, 258, 369 и 9 синих – 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789, 891, 912.

`Замечание`. Эта задача является продолжением (и обобщением) известной задачи, в которой требуется доказать, что в компании из 6 человек всегда найдутся трое, попарно знакомых между собой, или трое, попарно не знакомых.

Критерии. Записано соотношение $E + F + G = C_9^3 = 84$ — 1 балл. Доказано, что число неполных треугольников графа знакомств равно $\frac{1}{2}\sum d_i(8 - d_i)$ — 2 балла. Доказано, что число неполных треугольников $d_i(8-d_i) \leqslant 16$ для каждой вершины — 3 балла. Доказано, что число дружеских и незнакомых троек не меньше 12 — 4 балла (оценка). Приведён пример 4-регулярного графа без подсчёта числа троек — 5 баллов. Приведён пример с подсчётом, но не все тройки явно указаны — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

5. Окружность ω с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и C соответственно. Внутри угла BAC выбрана точка Q, причём на отрезке AQ нашлась точка P такая, что $AQ \perp OP$. Прямая OP вторично пересекает описанные окружности треугольников QPB и QPC в точках M и N соответственно. Докажите, что $OM = ON$.

Решение. Пусть описанные окружности треугольников QPB и QPC пересекают лучи AB и AC в точках D и E соответственно (рис. 9). Из теоремы о произведении отрезков секущих получаем:

$$AB \cdot AD = AP \cdot AQ \quad \text{и} \quad AC \cdot AE = AP \cdot AQ.$$

Отсюда $AB \cdot AD = AC \cdot AE$. Отрезки AB и AC равны как отрезки касательных к ω, поэтому $AD = AE$ и, значит, треугольник ADE равнобедренный.

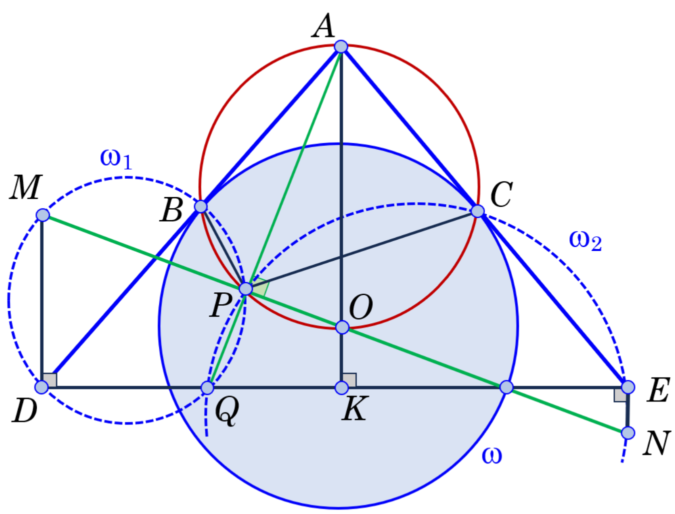

Рис. 9

Пусть K — середина DE. Тогда прямая AK является медианой, высотой и биссектрисой равнобедренного треугольника ADE, в частности, AK проходит через O. Поскольку B и C — точки касания окружности с центром O, имеем $\angle ABO = \angle ACO = \angle APO = 90^\circ$, то есть точки A, B, C, P, O лежат на окружности с диаметром AO.

Из вписанных четырёхугольников $ABPC$, $BPQD$, $CPQE$ имеем:

$$\angle PQD = 180^\circ - \angle PBD = \angle ABP = 180^\circ - \angle ACP = \angle PCE = 180^\circ - \angle PQE,$$

поэтому точка Q лежит на отрезке DE.

Так как четырёхугольник $PQDM$ вписанный, то $\angle MDQ = \angle MPQ = 90^\circ$, откуда $MD \perp DE$. Аналогично, $NE \perp DE$. Таким образом, $MD \parallel OK \parallel NE$ и $DK = KE$. Отсюда $OM = ON$.

Критерии. Доказано, что $AD = AE$ — 2 балла. Установлено, что прямая AO содержит биссектрису, медиану и высоту треугольника ADE — 3 балла. Дополнительно доказано, что точки A, B, C, P, O лежат на одной окружности (с использованием прямых углов) — 4 балла. Доказано, что точка Q лежит на отрезке DE — 5 баллов. Доказано, что $MD \parallel OK \parallel NE$ и $DK = KE$ — 6 баллов.